

K : corp. fin., espace vectoriel. Soit $E = \text{Ker}$, $\text{IK} = \text{IK} \cup \{0\}$

I. Familles de vecteurs de E

Def: (p227) On dit que la famille $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E si $\forall x \in E, \exists (d_1, \dots, d_n) \in \text{IK}^n$ tq $x = \sum_{i=1}^n d_i x_i$.
On note $E = \text{Vect}(\mathcal{G})$.

Def: (p218) On dit que $\mathcal{L} = (x_1, \dots, x_m)$ est libre si $\forall (d_1, \dots, d_m) \in \text{IK}^m, (\sum_{i=1}^m d_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}, d_i = 0)$.
Une famille non libre est dite liée.

Def: (p223) On dit que $B = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si B est à la fois génératrice et libre.

Expl: $(e_i)_{i=1}^m$ où $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ base de IK^m
 $(x^k)_{k=1}^n$ est une base de $\text{IK}_m[X]$.
(à base de $\mathbb{C}^n$)

Prop: B base si $\forall x \in E, \exists! (d_1, \dots, d_n) \in \text{IK}^n$ tq $x = \sum_{i=1}^n d_i x_i$.

Ex: $(\vec{e}_1 \subset \vec{e}_2 \subset \dots \subset \vec{e}_n \text{ libre}) \Rightarrow \vec{e}_n \text{ libe}$
 $(\vec{e}_1 \subset \vec{e}_2 \subset \dots \subset \vec{e}_n \text{ liée}) \Rightarrow \vec{e}_1 \text{ liée}$

th. de l'échange: (p229) Soient $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_p)$ et $\mathcal{L} = (y_1, \dots, y_r)$ resp génératrice et libre.
Alors 1) $r \leq p$

2) on peut remplacer d'au moins une façon r des vecteurs de $\mathcal{G}$ par ceux de $\mathcal{L}$ pour obtenir une famille génératrice de E .

Remarque: si $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_p)$ et $\mathcal{L} = (y_1, \dots, y_r)$ sont deux bases de E de même cardinal n , on a $p = r = n$.

II. Théorie de la dimension

Def: (p230) E est dit de dimension finie si E admet une famille génératrice finie.

Expl: $\{0\}$ et IK^m sont des $\text{IK} \text{Eus}$ de dim. finie.
 $\text{IK}[X]$ n'est pas de dimension finie
car $(1, x, x^2, \dots)$ gén., avec $\forall P \in \text{IK}[X], \deg P \leq \text{Card}(\text{deg}(P))$

th: Soit E de dim. finie,
1) E admet au moins une base finie
2) toutes les bases de E st. finies de même cardinal.

Def: On appelle dimension de E et on note $\dim_{\text{IK}}(E)$ le cardinal d'une base de E .

Expl: $\dim(E) = 0 \Leftrightarrow E = \{0\}$.

Prop: Soit $\dim$ dépend du corps de base: $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}) = 2, \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 1$

th: (Gourdon) Toute famille libre à n éléments est une base de E si $n = \dim(E)$.
Toute famille génératrice à n éléments est une base de E si $n = \dim(E)$.

théorème de la base incomplète: Soit E $\text{IK} \text{Eus}$ de dim finie.
Soit $\mathcal{L} = (y_1, \dots, y_r)$ une famille libre dans E .

• **forme forte:** Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .
Il y a au moins une façon de compléter $\mathcal{L}$ par $n-r$ vecteurs de B pour obtenir une base de E .
• **forme faible:** Il y a au moins une façon de compléter $\mathcal{L}$ par $n-r$ vecteurs de E pour obtenir une base de E .

Prop: (p232-233) Soient E $\text{IK} \text{Eus}$ dim m , F $\text{IK} \text{Eus}$ dim p .

- ① $p \leq m$
- ② F admet au moins un supplémentaire de E
- ③ Tout supplémentaire de F a pour dimension $m-p$.

th: Soit E un $\text{IK} \text{Eus}$ de dim. finie.

$\forall F, G$ $\text{IK} \text{Eus}$ de E :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

III. Rang (p236)

A. Rang d'une famille de vecteurs

Def: Le rang d'une famille de vecteurs est $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$.

Prop: Soit $\mathcal{F}$ famille finie d'éléments de E .

- ① $\text{rg}(\mathcal{F})$ est le plus grand cardinal des sous-familles libres de $\mathcal{F}$.
- ② $\mathcal{F}$ est libre si $\text{Card}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\mathcal{F})$.

B. Rang d'une application linéaire (p257)

Def: Soient E, F $\text{IK} \text{Eus}$ de dim. finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle rang de f et on note $\text{rg}(f)$

l'entier naturel défini par: $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$.

th: Théorème du rang:

Avec les mêmes notations

$$\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim \text{Ker}(f).$$